Il significato di crescita esponenziale in un ambiente di geometria dinamica

Domingo Paola[1]

Summary

In this paper I describe and analyze a teaching – learning experiment where a technological artefact (Cabri gémètre plus) is used in order to mediate the construction of the student's meaning for exponential growth. The proposed activity belongs to a long term Italian project to introduce students to the fundamental concepts of *Calculus* since the beginning of high school.

Introduzione

La tradizione scolastica italiana, per quel che riguarda l'insegnamento – apprendimento dell'analisi matematica, ha sempre insistito sugli aspetti formali e sintattici, considerando come prerequisiti necessari le tecniche di calcolo letterale e di risoluzione delle equazioni. Anche per questo motivo, i programmi prevedono la trattazione degli argomenti specifici dell'analisi matematica negli ultimi anni di scuola secondaria.

La facilità con cui può oggi si può tracciare un grafico o manipolare un'espressione algebrica, suggerisce di riconsiderare quella prassi didattica che, tra l'altro, è stata uno dei principali strumenti di selezione nei corsi di matematica. I software di cui oggi disponiamo rendono non solo possibile ristrutturare e riorganizzare l'insegnamento – apprendimento dell'analisi

---

[1] Liceo "A. Issel" di Finale Ligure; G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova – e mail: domingo.paola@tin.it

matematica, sia per quel che riguarda la sequenza degli argomenti proposti, sia per quel che riguarda il livello scolare in cui iniziare a proporli, ma suggeriscono anche una riflessione su come possono cambiare i significati stessi degli oggetti di studio. Ciò può anche disorientare a una prima lettura, ma, se si riflette con attenzione, si dovrebbe convenire che quanto sopra affermato è del tutto naturale, almeno se si condivide la posizione, espressa da Chevallard (Chevallard, 1992), che gli oggetti matematici sono emergenti da un insieme di problemi e pratiche associate all'interpretazione e alla risoluzione di quei problemi. Secondo tale posizione, i significati degli oggetti matematici sono esattamente le pratiche messe in atto per affrontare e risolvere problemi. Vi è quindi una stretta dipendenza tra pratiche e significati e, poiché le pratiche non possono non dipendere dagli strumenti utilizzati, ne consegue che tra i significati degli oggetti matematici e gli strumenti utilizzati per affrontare e risolvere problemi ci sono strettissime relazioni (Paola, 2004).

Ritengo che l'insegnamento – apprendimento dell'analisi matematica e i suoi nodi concettuali siano forse i più interessati, nell'intero panorama della matematica, dai cambiamenti che l'uso delle tecnologie oggi disponibili rendono possibili.

Secondo Kaput (Kaput, 2002) ci sono tre tipologie di conseguenze determinate dall'utilizzazione dei nuovi strumenti tecnologici nell'insegnamento – apprendimento della matematica:

a) il passaggio da una conoscenza statica, a una dinamica;

b) nuove modalità di rappresentazione di insiemi di dati (ottenuti da simulazioni o acquisiti tramite dispositivi specifici come i sensori) e delle relazioni che è possibile determinare;
c) il trattamento di problemi che non è possibile affrontare seriamente senza potenti strumenti di calcolo, come l'evoluzione di sistemi dinamici discreti non lineari.

In questo lavoro, attraverso la descrizione di un'attività didattica svolta con studenti di un secondo anno di liceo scientifico, mi propongo di riflettere su come un opportuno uso di un software di geometria dinamica[2] possa consentire esperienze molto significative nello studio delle variazioni di grandezze, prima ancora di disporre di quelle tecniche di calcolo formale che un tempo erano considerate necessarie premesse. Ritengo che il potenziamento delle capacità di esplorazione e osservazione permesso dall'uso delle nuove tecnologie consenta di effettuare esperienze sulle quali è possibile fondare la costruzione dei significati dei concetti fondamentali dell'analisi matematica.

La possibilità di anticipare attività significative relative allo studio della variazione delle grandezze nei primissimi anni di scuola secondaria crea inoltre le premesse necessarie per rendere accessibili a tutti gli studenti concetti matematici di importanza fondamentale nell'attuale società.

[2] Cabri – géomètre plus

L'attività didattica proposta e osservata

L'attività che viene presentata e discussa in questo articolo è stata proposta e realizzata in una seconda classe di liceo scientifico che segue un corso sperimentale PNI (Piano Nazionale dell'Informatica). Gli studenti hanno lavorato a coppie. Solo in un caso è stato formato un gruppo di 3 studenti nel quale uno dei tre componenti svolgeva il ruolo di *coscienza critica*, nel senso che si incaricava di porre domande tese a far riflettere i due compagni sull'attività svolta e, inoltre, aveva il compito di riportare su un foglio le fasi più importanti dell'attività del gruppo. Gli studenti hanno lavorato in aula di informatica tranne una coppia e il gruppo di tre componenti, che hanno lavorato in classe con due portatili e sono stati videoregistrati.

Prima di affrontare l'attività proposta, gli studenti avevano lavorato su modelli di crescita esponenziale e logistica (modelli dinamici discreti), utilizzando diversi software di manipolazione grafico – simbolica, in particolare quello disponibile sulle calcolatrici TI – 89. Sapevano inoltre che una successione definita per ricorrenza, che descrive un modello di crescita esponenziale, è caratterizzata dalla costanza del rapporto tra due termini successivi. Avevano infine buona pratica dell'uso di Cabri, Derive, Graphic Calculus e del foglio elettronico, oltre che delle già citate calcolatrici grafico – simboliche. L'attività descritta si inserisce in un percorso a lungo termine, di avvio allo studio delle grandezze che cambiano con l'ausilio delle nuove tecnologie[3]; chi fosse interessato può trovare ulteriori informazioni sul percorso didattico in (Paola, 2005) e i materiali relativi all'intero percorso didattico in rete all'indirizzo internet[4]:

http://www.matematica.it/paola/corso%20di%20matematica.htm

L'attività è stata strutturata dall'insegnante[5] con schede di lavoro che vengono riportate in appendice e di cui mi limito qui a descrivere brevemente le finalità didattiche.

La prima scheda propone inizialmente un'esplorazione in ambiente Cabri che ha lo scopo di far osservare agli studenti come variano le ordinate dei punti della funzione esponenziale $y = 2{,}7^x$ al variare di x. Il file di Cabri presenta un punto X sull'asse delle ascisse, di cui è precisata l'ascissa x, e un punto sull'asse delle ordinate la cui ordinata y è legata a x dalla relazione espressa dall'equazione $y = 2{,}7^x$. Per ogni x, il numero $2{,}7^x$ viene visualizzato sullo schermo del computer. Gli studenti, trascinando il punto X (anche eventualmente mediante lo strumento animazione), hanno la possibilità di visualizzare sia cinematicamente (osservano, soprattutto grazie allo strumento animazione, che la velocità di variazione del punto sull'asse y è molto maggiore di quella del punto X), sia numericamente (osservano come varia il numero che

---

3 Il riferimento per quel che concerne l'attività di ricerca didattica, è il nucleo di ricerca didattica di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello.

4 I materiali, che propongono un percorso triennale di avvio all'analisi matematica, sono liberamente utilizzabili, ma per prenderne visione è necessario possedere almeno una versione demo di TI-InterActive!, software con cui i materiali sono stati costruiti.

5 Domingo Paola.

indica l'ordinata del punto sull'asse y al variare dell'ascissa del punto X) la variazione di $2{,}7^x$ al variare di x.

In seguito si chiede agli studenti di descrivere le principali caratteristiche del grafico della funzione di equazione $y = 2{,}7^x$ e di provare poi a tracciarlo su un foglio.

Infine viene proposta una successiva esplorazione, sempre in ambiente Cabri, ma con un diverso foglio di lavoro nel quale compaiono:

a) un punto variabile X di ascissa x sull'asse delle ascisse;
b) un punto a^x sull'asse delle y legato a x dalla relazione espressa dall'equazione $y = a^x$;
c) il grafico della funzione esponenziale di equazione $y = a^x$ sul quale è riportato il punto P di coordinate (x, a^x);
d) una semiretta sulla quale è posto un punto A variabile, la cui ascissa consente di variare la base dell'esponenziale a^x.

Muovendo X gli studenti hanno la possibilità di osservare il punto P mentre percorre il grafico della funzione esponenziale a^x di base a fissata. Muovendo A è possibile invece vedere come varia il grafico della funzione esponenziale a^x al variare della base a (figura 1)

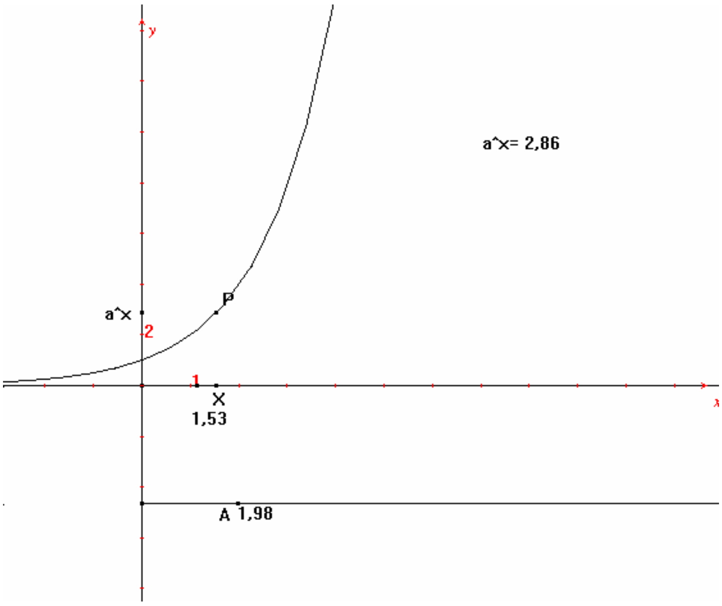

Figura 1

La seconda scheda propone un'esplorazione in ambiente Cabri con un foglio di lavoro molto più strutturato dei precedenti avente lo scopo di evidenziare sia gli aspetti locali, sia quelli globali della variazione dell'esponenziale. La struttura del foglio di lavoro è suggerita dalla figura 2, dove è possibile notare:

a) il grafico della funzione esponenziale a^x;
b) i punti P(x; a^x) , Q($x + \Delta x$; $a^{x+\Delta x}$) , H($x + \Delta x$; a^x) e K(-1; 0);
c) due punti variabili, Δx e a, la cui variazione consente di modificare, rispettivamente, l'incremento Δx e la base dell'esponenziale.

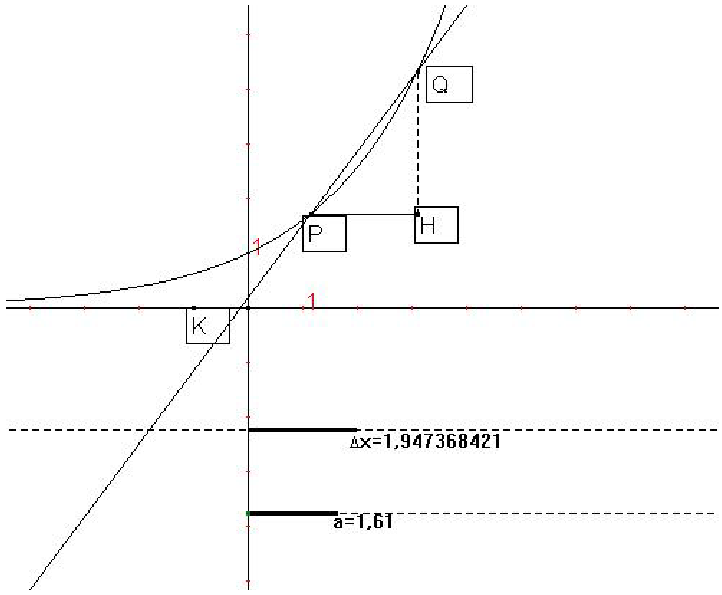

Figura 2

L'esplorazione effettuata variando Δx, (facendolo tendere a 0), ha l'obiettivo di evidenziare aspetti locali relativi alla variazione della funzione esponenziale, in particolare il valore della pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto P. L'esplorazione effettuata facendo variare P ha invece lo scopo di evidenziare aspetti globali relativi alla variazione della funzione esponenziale, in particolare la variazione della funzione derivata. Un'attività specifica, riportata nella scheda in appendice, consente agli studenti di tracciare in Cabri il grafico di una funzione che, al diminuire di Δx, approssima sempre meglio il grafico della funzione derivata, in modo tale da poter confrontare le congetture effettuate durante l'attività di esplorazione.

La costruzione del significato di crescita esponenziale

Vediamo, attraverso l'analisi di alcune fasi di lavoro di uno dei due gruppi di studenti che sono stati videoregistrati (Ciro e Gabriele), quale è stata l'evoluzione del processo di costruzione di significato del concetto di crescita esponenziale. I protocolli degli altri gruppi di lavoro e la videoregistrazione del gruppo di tre componenti testimoniano che anche per gli altri studenti si sono realizzati processi simili a quelli qui descritti. Il fatto che gli studenti avessero già visto, in precedenti attività, che un modello discreto di crescita esponenziale è caratterizzato dalla costanza del rapporto tra due termini successivi, non ha evitato l'insorgere di ostacoli e incomprensioni durante l'attività, né la non linearità del processo di acquisizione di significato di crescita esponenziale nel caso continuo.

Le prime osservazioni degli studenti sono a livello puramente percettivo: vedono che il numero $2{,}7^x$ cresce sempre più al variare di x, come esplicitamente osservato dal gruppo di Ciro e Gabriele:

Ciro: se è una funzione esponenziale, tende all'infinito

Gabriele: sì...aumenta sempre di più

In genere gli studenti si aiutano nelle loro esplorazioni osservando anche come variano i numeri presenti sul foglio di lavoro. Ciro e Gabriele, inoltre utilizzano, quando ancora non viene loro chiesto, lo strumento di Cabri "Traccia" per disegnare il grafico di $2{,}7^x$ al variare di x, in modo da trovare conferma alle congetture prodotte sulle caratteristiche del grafico della funzione $y = 2{,}7^x$.

Alla fine della prima scheda gli studenti sono in grado di dire che la crescenza della funzione esponenziale dipende dalla base e che, comunque, qualunque esponenziale con base maggiore di 1 cresce e cresce sempre più e che questo tipo di crescenza è descritto da un grafico che rivolge la concavità verso l'alto.

Un interessante dialogo, che suggerisce un buon livello di comprensione delle caratteristiche di una crescita esponenziale, si ha in riferimento al lavoro effettuato sul secondo file proposto nella prima scheda:

Gabriele: non ho capito cosa si può modificare

Ciro: la base

Gabriele: ah, ma vedi, se tu cambi questo (si riferisce al cursore che consente di modificare la base dell'esponenziale)... *cioè diventa più stretta o aumenta di più o di meno*

Ciro: aumenta il tasso si crescita

Gabriele: sì

Ciro: della funzione...quindi varia il tasso di crescita

[...]

Ciro: ma anche per uno stesso, cioè per uno stesso spazio della x, aumenta di molto la y

Gabriele: sì

Ciro: eh, come lo dico, così?

Gabriele: oppure lo puoi dire con le differenze, per un intervallo simile le differenze sono sempre maggiori (in questo caso Gabriele fa riferimento a una tecnica, quella delle differenze finite per studiare le variazioni delle grandezze, che è stata utilizzata più volte in classe).

Con la seconda scheda l'attenzione si sposta su aspetti più vicini a quelli che si considerano nell'analisi matematica, soprattutto per la dinamica locale – globale che l'attività proposta innesta. Infatti inizialmente gli studenti sono spinti, grazie anche all'azione dell'insegnante che interviene nei gruppi di lavoro, a focalizzare l'attenzione su ciò che accade in un intorno del punto P (x; a^x). Facendo tendere Δx a 0, il foglio di lavoro mostra che la corda PQ tende a descrivere sempre meglio (localmente) il grafico della funzione esponenziale. È abbastanza naturale per gli studenti individuare come "pendenza locale del grafico dell'esponenziale" quella della retta tangente in P (figura 3, anche per il successivo dialogo).

Gabriele: aspetta, aspetta e varia il segmento QH, guarda, se tu lo sposti...se maggiormente, questo qua aumenta (si riferisce al fatto che aumentando Δx aumenta anche il segmento QH)

Ciro: sì, aspetta un attimo, fai...mettilo invece in basso

Gabriele: ah

Ciro: vedi pian piano...pian piano sembra tipo quasi, non so come dire, tangente

Gabriele: eh, sì

Ciro: sembra che la tocca...vai, vai, vai...

Gabriele: eh, sì...qua...

Ciro: piano piano

Gabriele: è tangente

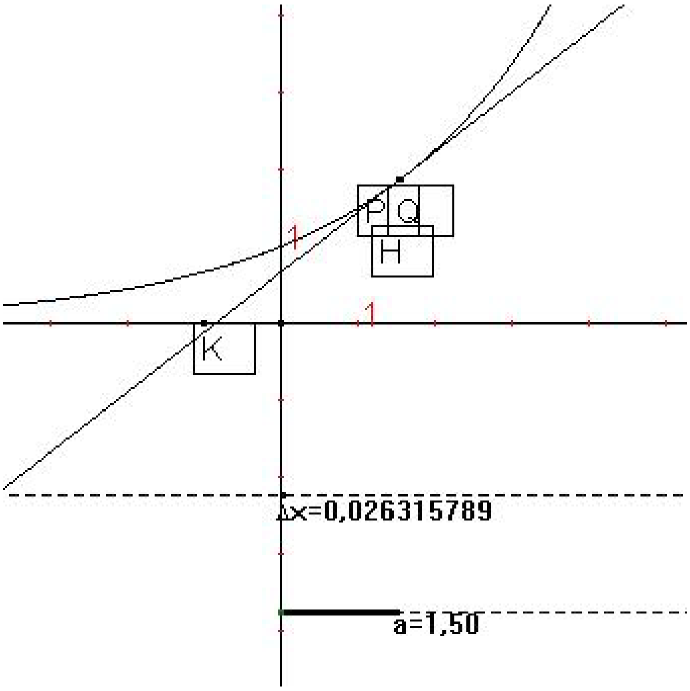

Figura 3

L'esplorazione successiva è quella di vedere come varia la pendenza di PQ, ossia del segmentino che localmente approssima la funzione, al variare di P, lasciando Δx fissato e sufficientemente piccolo. In questo modo si ottiene una buona approssimazione di una retta tangente che percorre il grafico, assumendo un approccio globale allo studio della crescenza della funzione esponenziale. Seguiamo il seguente dialogo in cui è presente nel gruppo anche l'insegnante, con la finalità di stimolare la discussione e fornire suggerimenti che possano agire in una sorta di zona di sviluppo prossimale. La prima frase dell'insegnante fa riferimento a una fase precedente del dialogo nella quale gli studenti spiegano che al tendere a 0 di Δx la retta secante PQ tende a diventare tangente al grafico.

Insegnante: e allora che informazioni vi darà in questo caso?

Gabriele: ah, cioè, si può anche...si può dire che la funzione esponenziale si fa in tante piccole rette.. […].

Gabriele: che, cioè, che...eh, con pendenze sempre maggiore, che si uniscono in un, che si toccano in un punto

Insegnante: quindi stai immaginando di...approssimare con tanti piccoli segmentini

Gabriele: cioè, se tu lo prendi, non so, con uno zoom molto grande...si può approssimare come tante piccole rette...

Si noti l'uso di termini che fanno riferimento a strumenti di uso comune in classe (per esempio la funzione Zoom delle calcolatrici) e che suggeriscono la dipendenza della genesi dei significati dagli strumenti utilizzati.

Insegnante: e queste rette che caratteristiche hanno? tu dicevi…

Gabriele: hanno...cioè, possono avere una, una funzione, una pendenza magari sempre il doppio di quella prima

[…]

Ciro: esponenziale ovvero il rapporto tra la y del punto e quello successivo è costante, sempre...

Insegnante: e questo vi sorprende… sul fatto che qui si schiacci molto sull'asse delle x, qua sembra quasi crescere poco e qua cresce invece molto, vi sorprende questo fatto con un rapporto costante una crescita di questo tipo oppure è naturale?

Ciro: il fatto, cioè...sì, perché...

Gabriele: eh, sì, perché prima ci sono, con numeri piccoli...quindi con numeri piccoli il rapporto è sempre tra numeri più vicini […] *tra numeri grandi, il rapporto...*

Insegnante: sì, ok. Sopra [il riferimento è ai gruppi di studenti che stavano lavorando in laboratorio di informatica, che si trova al piano superiore] *hanno usato un esempio suggestivo: se noi prendiamo il 10 per cento di 5 cent, è 0.5, quasi non esiste nemmeno, no?...è come se non ci fosse, prendiamo il 10 per cento di 5 milioni di euro e invece la cosa inizia a cambiare, no? è una bella somma...*

Alla fine di questa attività gli studenti sono pronti a riconciliare i punti di vista locale e globale nella descrizione delle caratteristiche della funzione derivata. La parte finale della scheda richiede infatti di descrivere le caratteristiche, e poi disegnarne il grafico aiutandosi con Cabri, della funzione che assume, per ogni x, il valore della pendenza della retta tangente al grafico dell'esponenziale nel punto di ascissa x (si tratta quindi proprio del grafico della funzione derivata). Quasi tutti gli studenti sono arrivati a stabilire che la funzione "pendenza" (così chiamata dagli studenti, perché il nome usuale di derivata è stato introdotto esplicitamente e definitivamente solo qualche mese dopo l'attività descritta) è essa stessa un'esponenziale. Dalla videoregistrazione del gruppo di Andrea, Luca e Simone, pur nell'imprecisione e nell'immediatezza del linguaggio parlato, si rileva chiaramente la comprensione del fatto che la crescita esponenziale è caratterizzata dalla relazione che, simbolicamente, si esprime con la relazione $f'(x) = k * f(x)$ con k non nullo.

Andrea:...la pendenza diminuisce sempre più sino a tendere a zero ma non tende a zero,[Andrea sta trascinando il punto P sul grafico da destra verso sinistra per chi guarda il video: le sue parole possono essere poco felici e poco adeguate a una corretta sistemazione, ma non sono sbagliate: la pendenza sta effettivamente diminuendo] *allora il grafico è un grafico in cui la pendenza diminuisce e sembra tendere a zero ma non tende mai a zero e poi cresce,*[adesso trascina P da sinistra verso destra] *cioè, andando verso là, e crescendo aumenta sempre più e direi che è esponenziale...e direi proprio che è esponenziale…*

Il gruppo di Ciro e Grabriele, invece, non completa il percorso nel tempo previsto in quanto si imbatte in un ostacolo inatteso, evidenziato durante un intervento dell'insegnante durante il lavoro di gruppo. Si tratta di un problema legato alla caratteristica della funzione esponenziale di crescere e crescere sempre più. Sia la caratterizzazione linguistica, sia, soprattutto, quella grafica generano nei due studenti l'equivoco che la funzione esponenziale presenti un asintoto verticale. Si tratta, appunto, di un imprevisto nell'attività programmata, che può impedire (come in effetti accade) che l'attività stessa venga completata nel tempo a disposizione. Nonostante ciò l'insegnante non si limita a dire che le cose non stanno in questi termini, ma avvia un confronto con i due studenti in modo da evidenziare le contraddizioni che si avrebbero dal supporre che la funzione esponenziale presenti un asintoto verticale. Vediamo le fasi principali di questo dialogo che, lungi dall'impedire ai due studenti di costruirsi un significato per il concetto di crescita esponenziale, contribuisce a precisare alcuni aspetti e a chiarire alcuni equivoci che l'uso dei grafici può causare. Le varie fasi del dialogo tra l'insegnante, Ciro e Gabriele, sono accompagnate da immagini tratte dalla videoregistrazione, perché in tal caso assume particolare importanza, nel processo di costruzione di significato, la gestualità.

Primo momento: Gabriele avanza l'ipotesi che la funzione esponenziale tenda ad assomigliare, per x grandi, a una retta verticale. L'insegnante vuole capire se lo studente sta pensando a un asintoto verticale per il grafico della funzione esponenziale a^x. L'immagine (figura 4) fa riferimento al momento in cui l'insegnante chiede se la retta verticale di cui parla Gabriele e il grafico della funzione si incontrano oppure no. L'indice della mano destra, posizionato verticalmente vuol rappresentare una retta verticale (l'eventuale asintoto), mentre l'indice della mano sinistra, inclinato rispetto alla verticale, rappresenta il grafico dell'esponenziale. L'idea che vuole essere veicolata con questo gesto prodotto dall'insegnante è che il dominio della funzione esponenziale non è limitato e quindi il suo grafico intersecherebbe qualunque retta verticale. La convinzione di Gabriele sull'esistenza di una retta verticale viene messa in crisi.

Figura 4

Gabriele: ma sempre per a *molto grande questa retta, quando si incontrano, lì è di nuovo, cioè approssima il, la funzione molto bene perché...*

Insegnante: quale retta, scusa?

Gabriele: questa qua...questa, per x molto, molto grande

Insegnante: si incontreranno?

Gabriele: cioè, sì, si incontrano...

Insegnante: però dopo che si sono incontrate cosa succede?

Gabriele: eh...eh...fa così… sembra strano che cosa succede ….

Secondo momento:la seconda immagine (figura 5) esplicita l'idea precedente. L'indice della mano sinistra continua a rappresentare il grafico della funzione, ma ora si muove, seguendo il movimento verso la finestra della mano destra che suggerisce che i punti del grafico di una funzione esponenziale possono assumere una ascissa comunque grande (il dominio non è limitato)

Figura 5

Insegnante: ah, ok, questa [riferendosi all'esponenziale] *poi continua, questa qui, la retta verticale, ha una x ben fissata, no? L'esponenziale poi continua ad aumentare la x, no? sei d'accordo? o no?*

Gabriele: sì

Insegnante: tu Ciro sei d'accordo su questo fatto?

Ciro: non ho sentito

Richiamare l'attenzione di Ciro serve all'insegnante sia per verificare che anche Ciro non sia caduto nell'equivoco, sia per rinforzare l'effettivo livello di consapevolezza da parte di Gabriele dell'equivoco che sembra essersi manifestato relativamente alla presenza dell'asintoto verticale.

Insegnante: lui [ossia Gabriele] *diceva che questa retta verticale approssima molto bene la funzione esponenziale …*

Gabriele: cioè, ma per x molto grandi

Insegnante: e per x molto grandi quanto? X = 100 miliardi?

[…] *Cioè perché a un certo punto, la funzione cresce di più e sempre di più anche lei diventa quasi una retta verticale…*

Terzo momento: le due successive immagini (figure 6 e 7) propongono gesti simili a quelli delle figure 4 e 5 e servono come rinforzo per Gabriele e come ricapitolazione di quanto detto per Ciro:

Figure 6 e 7

Insegnante: eh, questo è quello che a voi in sostanza sembra guardandola, ma per x = 100 miliardi questa barriera viene superata prima o poi o no?

Gabriele: sì

Quarto momento: le tre successive immagini (figure 8, 9 e 10) indicano i gesti fatti dall'insegnante con lo scopo di richiamare l'attenzione degli studenti sul fatto fondamentale che il dominio di una funzione esponenziale non è limitato e ciò impedisce (rende contraddittoria) la presenza di un asintoto verticale.

Figure 8, 9, 10

Insegnante: nel momento che viene superata, questa x 100 miliardi, quanti ne hai ancora a disposizione di x, dopo 100 miliardi?

Gabriele: infiniti

Insegnante: infiniti...e quanto ti puoi allontanare dopo i 100 miliardi?

Gabriele: infiniti punti

Insegnante: quindi la funzione esponenziale se ne va per i fatti suoi...ok? sembra di pensare, guardando i disegni dei grafici al computer, che una retta verticale possa approssimare bene, a un certo punto, una funzione esponenziale, ma questo ragionamento che ho fatto, no? qualunque sia x, ne ho ancora infinite a disposizione ... rende contraddittoria l'idea di una barriera verticale!

A mio avviso questo è un tipico esempio in cui i gesti riescono, meglio di tante parole a trasportare significato, in particolare che non può esistere un asintoto verticale per una funzione esponenziale. Il gesto in questo caso ingloba, descrive, rappresenta bene il generico: un disegno di Cabri o anche sulla carta sarebbe meno chiaro, perché segni come i disegni su Cabri o sulla carta hanno uno statuto meno generico del gesto. Nel gesto non sembra esserci un sistema di riferimento semiotico ben preciso: è tutto labile, più dello scritto, ma probabilmente anche del parlato. C'è solo la rappresentazione di che cosa accade quando una qualunque retta verticale e il grafico dell'esponenziale si incontrano e l'evocazione di ciò che accade dopo, ossia per *x* maggiori.

Naturalmente anche il fatto che il grafico non possiede asintoti verticali, oltre alle più significative caratteristiche della sua crescenza, interviene nella costruzione di significato del comportamento di una crescita esponenziale.

Conclusioni

Nell'attività qui presentata e discussa ci sono alcuni aspetti che vorrei evidenziare in queste brevi conclusioni e che mi sembrano caratterizzare un approccio didattico teso alla costruzione di significato per gli oggetti di studio.

In primo luogo, l'attività di costruzione di significato non può avere come punto di partenza la presentazione di una teoria già sistemata. Gli aspetti formali sono sullo sfondo di questa esperienza, più che altro come possibilità per successivi approfondimenti e inquadramenti in una teoria. Sono proprio attività del tipo di quelle presentate in questo articolo, che vanno alla ricerca delle radici cognitive delle idee matematiche, che rendono possibile la costruzione di significati per gli oggetti matematici e danno quindi senso alla successiva attività di formalizzazione che dovrà portare a una condensazione di significato, piuttosto che non a un'evaporazione dello stesso.

In secondo luogo l'appropriazione di significato di un oggetto matematico è un processo intrinsecamente individuale, che però è favorito dall'interazione con altri individui, sia esperti, come l'insegnante, sia apprendisti, come i compagni. L'interazione è favorita dall'uso di strumenti semiotici efficaci diversificati, compresi i gesti, l'uso di metafore cariche di significato, le risorse messe a disposizione dalle nuove tecnologie. Il fatto che la velocità di crescita di una funzione esponenziale è proporzionale al valore assunto dalla funzione stessa è un fatto di fondamentale importanza nella costruzione di significato per la crescita esponenziale ed è improbabile che la formula $f'(x) = k * f(x)$ possa racchiudere in sé, per un principiante, tutti i significati che gli studenti si sono costruiti svolgendo le attività descritte in questo articolo. Una domanda del tipo "esiste una funzione la cui velocità di crescita è uguale alla funzione stessa?" assume naturalmente significato dopo un'attività come quella che ho proposto in Cabri, ma non sembra altrettanto naturale e comprensibile per un principiante che lavora solo in un ambiente carta e matita.

Come detto da Ferdinando Arzarello nella conferenza plenaria tenuta nel 2005 alla CIEAEM (Arzarello, in stampa), uno degli scopi principali nell'insegnamento – apprendimento della matematica è promuovere, quanto più possibile, la costruzione di conoscenza degli studenti mediante l'uso di flessibili strumenti di mediazione semiotica. L'attività qui descritta e discussa credo che vada proprio in questa direzione.

Bibliografia

Arzarello, F. : (in stampa), Technology and mathematics in the classroom: lights and shadows, *Atti della CIEAEM*, Piazza Armerina.

Chevallard, Y.: 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche antropologique, *Recherches en Didactique des Matématiques*, 12 (1), 73 - 112.

Kaput, J., 2002, Implications of the Shift from Isolated, Expensive Technology to Connected, Inexpensive, Divers and Ubiquitous Technologies, in (Fernando Hitt editors) *Representations and Mathematics Visualization*, Mexico, p. 80 – 109.

Paola, D.: 2004, Insegnamento - apprendimento tecnologico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 27A - B n. 6, 671 - 704.

Paola, D.: 2005, L'insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano, *Progetto Alice*, vol. VI, n. 16 43 - 87.

Appendice

Scheda di lavoro 1 (tempo concesso fino a 45 minuti)

1. Aprite con Cabri II il file “2,7allax”. In esso vedrete, sull’asse delle x il punto X e sull’asse delle y il punto $(2,7)^x$. Muovete il punto X sull’asse delle x e osservate che cosa accade al punto $(2,7)^x$ sull’asse y (ossia osservate come $(2,7)^x$ varia al variare di x). Per fare queste osservazioni cambiate anche l’unità di misura sull’asse delle y. Dopo qualche prova effettuata manualmente, passate alle animazioni. Spostate il punto X verso la sinistra del vostro foglio di lavoro, fino ad arrivare quasi all’estremo del campo di variazione delle x negative, e poi animate con una molla il punto X in modo che si muova da sinistra verso destra.

Scambiatevi tutte le osservazioni che ritenete interessanti sul movimento coordinato dei due punti e tenete traccia (sintetica, ma comprensibile) della vostra discussione sul protocollo che vi è stato consegnato.

2. Quale pensate che sia l’andamento del grafico della funzione $y = (2,7)^x$? Prima di tracciarlo sul vostro protocollo, dando un’indicazione su come sia possibile giustificare il grafico che avete tracciato, cercate di mettervi d’accordo su quelle che ritenete siano le principali caratteristiche del grafico di $y = (2,7)^x$

3. Aprite con Cabri II il “aallax”. In esso vedrete un punto X sull’asse delle x, un punto a^x sull’asse delle y, un punto P di coordinate (x, a^x) che, quindi, descrive, al variare di x, il grafico della funzione $y = a^x$ e, infine, una semiretta sulla quale è situato un punto A la cui ascissa rappresenta la base a dell’esponenziale a^x. Questo vuol dire che, variando la posizione di A, si possono ottenere esponenziali di base diversa (tutte maggiori di zero: per questa scelta c’è un motivo ben preciso su cui discuteremo in classe). Quindi, muovendo il punto A variate la base dell’esponenziale. Muovendo, invece, il punto P percorrete il grafico di una funzione esponenziale di base fissata.

Fate qualche esplorazione, scambiatevi eventuali impressioni (c’è qualcosa che non è chiaro, che non vi aspettavate o che, invece, vi è chiaro e vi aspettavate?)

Riportate sul protocollo traccia sintetica della vostra esplorazione.

Scheda di lavoro 2 (tempo concesso fino alla fine della seconda ora)

1. Aprite con Cabri II plus il file "exp". Osservate attentamente la figura: notate che ci sono solo alcuni oggetti che potete muovere (indicati con i punti P, e *a* e con il segmento Δx); notate anche che i segmenti PH e Δx hanno la stessa lunghezza (sono stati costruiti in modo tale da avere la stessa lunghezza). Descrivete brevemente la figura, muovendo prima P, poi Δx (variandone la lunghezza), poi A; trascrivete una sintetica traccia delle vostre osservazioni sul foglio protocollo.

2. Soffermatevi in particolare su che cosa accade quando Δx tende a zero … questa richiesta vi suggerisce altre osservazioni oltre a quelle di cui avete già discusso e che avete riportato sul foglio protocollo? Perché?

3. Vogliamo ora cercare di studiare come varia, al variare di x, la pendenza della funzione lineare che meglio approssima, in x, la funzione $y = a^x$. Come abbiamo già qualche volta detto, ciò equivale a chiedersi come varia, al variare di x, la pendenza della retta tangente al grafico della funzione $y = a^x$ nel punto di ascissa x. Potete utilizzare il foglio di lavoro di Cabri per aiutarvi a rispondere a questa domanda: potete effettuare tutte le esplorazioni che volete, anche utilizzare eventuali altri strumenti software disponibili sul PC, oppure non utilizzare alcun software: quale che sia la vostra decisione nella scelta (motivata) della strategia risolutiva, vi chiediamo di discutere brevemente di quelle che ritenete siano le caratteristiche del grafico della funzione $m = m(x)$ dove m è la pendenza della retta tangente al grafico di $y = a^x$ nel punto di ascissa x. Vi stiamo chiedendo di dire come varia, al variare di x, la pendenza della retta tangente al grafico di $y = a^x$ nel punto di ascissa x. Dopo aver discusso, argomentando le vostre opinioni, passate alla trascrizione sintetica sul vostro protocollo delle caratteristiche del grafico di $m = m(x)$, tracciandone anche uno schizzo.

4. Effettuate sul file di Cabri II plus "exp" le seguenti costruzioni:

- Tracciate la retta parallela alla tangente e passante per K (-1,0) già presente nel file
- Individuate il suo punto di intersezione con l'asse y (e chiamatelo F)

- Tracciate la retta passante per F e parallela all'asse x
- Tracciate la *Retta parallela* all'asse y e passante per P
- Le ultime due rette si intersecano in un punto; chiamatelo M

Riflettete su quanto avete fatto: se supponiamo che x sia l'ascissa di P e che m sia la pendenza della retta tangente in P al grafico della funzione $y = a^x$, allora il punto M ha coordinate (x, m). Quindi se muovete P e fate lasciare a M la traccia del suo movimento al variare di quello di P, che cosa ottenete? Confrontate quello che ottenete con questo movimento rispetto a quanto avete scritto sul protocollo rispondendo al precedente esercizio. Qualcosa vi sorprende o non vi è chiara? Discutetene e riportate traccia della discussione sul protocollo.